

碳酸盐岩超压岩石物理模拟实验及超压预测理论模型

刘宇坤¹, 何生¹, 何治亮², 张殿伟², 李天义², 王晓龙³, 郭小文¹

[1. 中国地质大学(武汉)构造与油气资源教育部重点实验室, 湖北武汉 430074; 2. 中国石化石油勘探开发研究院, 北京 100083; 3. 长江大学地球物理与石油资源学院, 湖北荆州 434023]

摘要:碳酸盐岩地层超压预测目前仍然是超压研究的难点问题,常用的碎屑岩地层超压预测方法是建立在 Terzaghi 有效应力理论基础上的、经验性的、且需要有明确响应超压的测井和地震参数(主要是纵波速度)。这些经验性的方法不适用于岩性致密且物性极不均一的碳酸盐岩地层的超压预测。通过碳酸盐岩样品超压岩石物理模拟实验剖析岩石弹性性质与孔隙流体压力和有效应力的关系,基于含流体岩石多孔介质弹性理论和广义胡克定律,从分析碳酸盐岩地层应力-应变-孔隙压力本构关系着手,建立表征孔隙压力与岩石弹性参数定量关系的超压预测理论模型(超压预测量化模型)。利用实测碳酸盐岩样品矿物组分含量并结合 Voigt-Reuss-Hill 模型计算岩石基质弹性模量,利用 Wood 模型和 Patchy 模型计算孔隙流体弹性模量,然后再利用碳酸盐岩样品岩石物理模拟实验得到的实际有效应力与岩石骨架弹性模量相关关系,根据 Biot 有效应力定律,计算得到岩石样品的等效骨架弹性模量。利用上述获得的碳酸盐岩样品各弹性参数,通过超压预测量化模型计算碳酸盐岩超压,并与碳酸盐岩样品岩石物理模拟实验加载的孔隙流体压力进行对比,验证了超压预测量化模型的合理性,提出了基于实测资料的模型校正方法。该超压预测理论模型所需的岩石弹性参数也可通过研究测井和地震资料计算获得,并可利用地震资料实现碳酸盐岩地层的超压钻前预测。

关键词:多孔介质弹性理论;有效应力;弹性波速度;岩石物理模型;超压预测;碳酸盐岩地层

中图分类号:TE135

文献标识码:A

The rock physics modeling experiment under overpressure and theoretical model for overpressure prediction in carbonate rocks

Liu Yukun¹, He Sheng¹, He Zhiliang², Zhang Dianwei², Li Tianyi², Wang Xiaolong³, Guo Xiaowen¹

[1. Key Laboratory of Tectonics and Petroleum Resources, Ministry of Education, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan, Hubei 430074, China; 2. Petroleum Exploration and Production Research Institute, SINOPEC, Beijing 100083, China; 3. School of Geophysics and Petroleum Resources, Yangtze University, Jingzhou, Hubei 434023, China]

Abstract: Prediction of overpressure in carbonate formations is still a difficult problem in overpressure researches. The most common methods on overpressure prediction in clastic formations are empirical based on Terzaghi effective stress theory as well as logging and seismic parameters (mostly P-wave velocity) which have a clear response to overpressure. These empirical methods are not applicable to predict overpressure in carbonate formations with dense matrix and extremely

used to calculate the elastic modulus of pore fluids, and then the equivalent elastic modulus of rock framework is calculated indirectly by the Biot effective stress theory and the correlation between effective stress and elastic modulus of rock framework was acquired through the rock physics modeling experiment. The above obtained elastic parameters were in turn used to calculate overpressure in carbonate rocks by the quantitative overpressure prediction model. In comparison with the pore fluid pressure artificially loaded in the carbonate rock physics modeling experiment, we verified the applicability of the quantitative model of overpressure prediction in carbonate rocks, and proposed the idea for correction of the theoretical model of overpressure prediction. The rock elastic parameters required for the theoretical model of overpressure prediction can also be calculated by studying logging and seismic data, and the pre-drilling overpressure prediction with seismic data could also be achieved in carbonate formations.

Key words: poroelasticity theory, effective stress, elastic wave velocity, rock physics modeling, overpressure prediction, carbonate formation

碳酸盐岩地层超压预测是目前国内外尚未得到解决的研究难题。以往针对碎屑岩地层中的异常高压预测,应用广泛且效果较好的经验性的方法有:利用孔隙度和声波测井资料的等效深度法^[1](Magara, 1978),利用声波和电阻率测井资料的 Eaton (1972) 公式法^[2-3],利用地震层速度的 Fillippone (1979) 公式法^[4-5],通过建立声波速度-孔隙度-泥质含量-垂直有效应力等参数之间经验关系的 Eberhart-Phillips 模型^[6](1989)和 Bowers 模型^[7](1995)等。这些方法是依据 Terzaghi 有效应力理论,通过建立孔隙压力与不同响应参数之间的经验关系进而实现对碎屑岩地层超压的量化评价。然而,这些方法并不适用于碳酸盐岩地层中的超压预测。原因在于:①碳酸盐岩成岩作用早期主要是化学压实作用或化学、机械和生物的混合作用,与碎屑岩普遍存在早期机械压实作用存在很大的差异;②寒武纪以来的白云岩主要为碳酸盐岩或灰岩沉积物的白云石化产物,在这种白云岩化、重结晶和溶蚀作用过程中地层流体参与和矿物颗粒体积的变化,可导致岩石中原始孔隙结构发生巨大的改变^[8],使得碳酸盐岩孔渗、孔隙结构等极不均一。总之,现今碳酸盐岩地层的岩性和物性是地表和地下作用过程中多种类型的沉积、成岩作用和多重化学反应叠加的结果,从而造成碳酸盐岩地层的岩性和物性等非均质性极强,因此碳酸盐岩地层纵向上几乎不具有规律性的变化,难以建立反映 Terzaghi 有效应力变化的测井与地震响应参数,所以碳酸盐岩超压预测一直是国内外研究的难题。根据以上问题,本文从碳酸盐岩超压岩石物理模拟实验着手,探明不同围压与孔隙压力作用下岩石弹性波速度的变化规律,分析碳酸盐岩岩石应力-应变本构关系,进而推导建立基于多孔介质弹性理论的超压预测理论模型(超压预测量化模型),并利用实验室测试资料验证理论模型的合理性,提出理论模型的初步校正方法。

1 碳酸盐岩超压岩石物理模拟实验

1.1 样品信息及加工制备

利用川东北毛坝地区 MB503 井和 MK03 井取心段样品,开展不同压力环境和流体饱和度的碳酸盐岩超压岩石物理模拟实验研究。岩石纵、横波速度是岩石弹性性质的综合体现,通过测试岩石不同状态下的纵、横波速度并计算岩石弹性参数,为探明碳酸盐岩响应超压的关键参数提供依据。实验前,利用封蜡法测试样品岩石表观体积,电子秤称量质量进而计算样品骨架密度(表观密度);利用氦气法测试样品常压孔隙度、渗透率和覆压孔隙度。岩石骨架密度反映了岩石矿物组成、致密程度等综合性质,而岩石基质密度主要反映岩石矿物组成性质。实验样品选取 4 块岩性、孔隙致密程度有差异的碳酸盐岩岩心样品,开展岩石物理模拟实验,样品孔隙以基质晶间孔为主。实验样品孔隙度范围为 0.76% ~ 21.44%,渗透率范围为 $(0.005 \sim 3\,098.270) \times$

表 1 川东北毛坝地区钻井岩心实验样品物性参数

Table 1 Physical parameters of experimental samples from the core of Maoba area in the northeastern Sichuan Basin

样品编号	岩性	直径/mm	高度/mm	骨架密度/(g·cm ⁻³)	基质密度/(g·cm ⁻³)	常压孔隙度/%	常压渗透率/(10 ⁻³ μm ²)
M-1	粉晶灰岩	25.14	50.63	2.74	2.76	0.76	0.005
M-2	细晶白云岩	25.16	52.54	2.45	2.84	13.60	2.759
M-3	鲕粒细晶白云岩	37.67	51.65	2.26	2.88	21.44	2 280.190
M-4	鲕粒细晶白云岩	38.03	58.76	2.37	2.87	17.40	3 098.270

实验样品加工与实验方法等均严格按照岩石物理力学参数实验标准进行。首先,利用岩心钻取机沿平行地层面和垂直地层面方向钻取直径约为 38 mm 和 25 mm 小柱,优选上下端直径偏差小于 0.3 mm 的样品;然后利用 HQ-Ⅲ型全直径岩心切片机将岩样切成高径比约为 1.5~2.0 的标准圆柱;并用 HZM-II 型精密岩心磨平机将岩样两端面磨平,两端平行度小于 0.05 mm,加工精度达到中华人民共和国国家标准(GB/T 23561.7—2009)。

1.2 实验仪器及测试流程

此次碳酸盐岩样品超压岩石物理模拟实验采用 MTS 岩石物理参数测试系统(最大围压 140 MPa,最大孔隙压力 100 MPa)和 HXDC-II 型岩石三轴超声波速度测试系统(最大围压 120 MPa,最大孔隙压力 70 MPa)。实验采用可视化控制系统,其中超声波换能器主频为 1 MHz,通过计算机声波采集系统给出不同应力条件下的纵波与横波速度等相应结果。

实验过程第一步,测试碳酸盐岩样品骨架(干燥岩石)纵波与横波速度及弹性参数随有效应力(围压)的变化。实验开始前,将样品置于 100 ℃真空恒温烘箱中烘干 24 h 以上,当真空度变化小于 0.01 MPa 时取出样品放置室内环境 24 h,以消除水对岩石骨架的化学软化作用,得到含水分 2%~3% 的干燥样品^[9]。将岩样密封入岩心夹持筒内,流体管压力放空(孔隙压力为 0),通过围压增压系统加压测量不同围压条件下干燥岩样纵波与横波速度,具体实验条件见表 2。

实验过程第二步,上步测试后将岩样取出放置 12 h 消除岩石加载-卸载后的弹性滞后现象,将样品放入岩心夹持筒,利用围压增压系统改变围压,利用 ISCO-D 系列高精度柱塞驱替泵通过流体管注入孔隙压力(流体为蒸馏水),记录驱替流量计算含水饱和度(S_w)。通过不断改变围压与孔隙压力,测试含流体碳酸盐岩样品纵横波速度

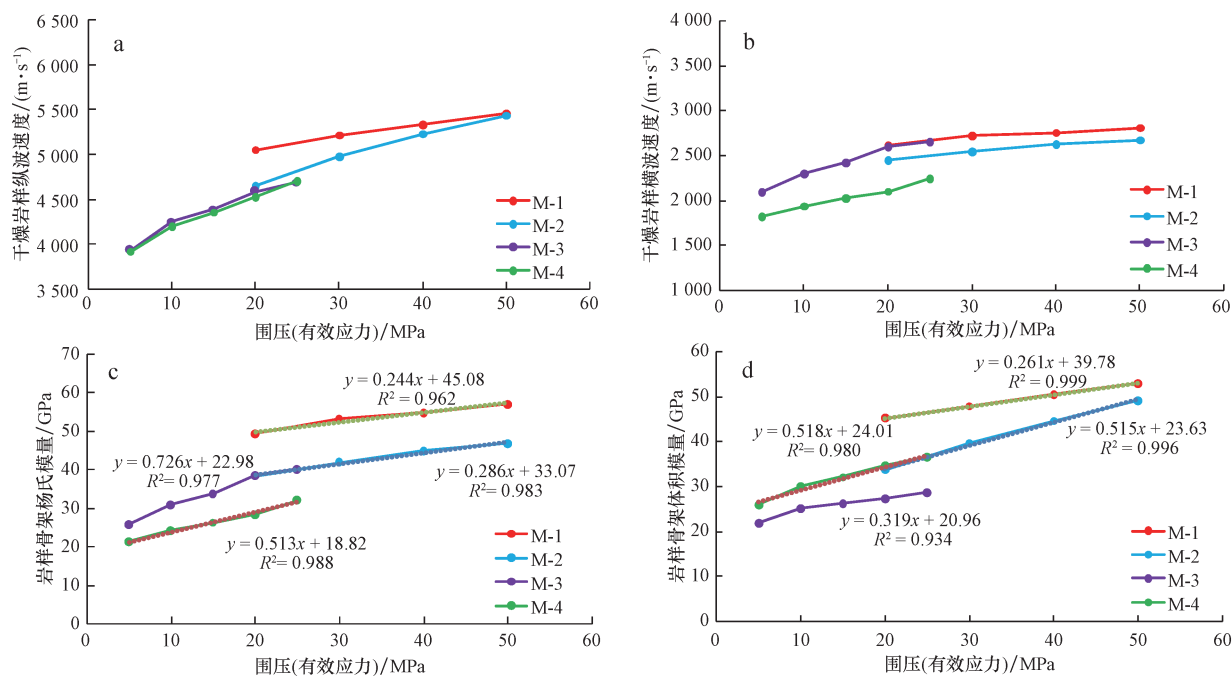
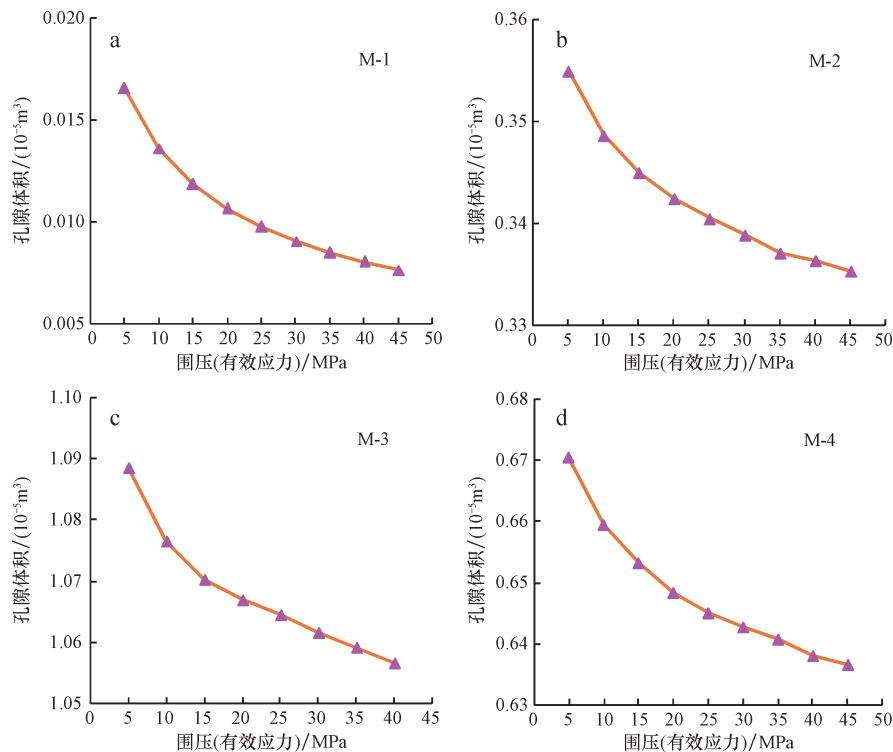


图2 碳酸盐岩干燥岩样纵横波速度、骨架杨氏模量、体积模量与围压(有效应力)的关系

Fig.2 Correlations of confining pressure (effective stress) with P-and S-wave velocities, with Young modulus, and with bulk modulus respectively in dried carbonate rocks

a. 骨架纵波速度; b. 骨架横波速度; c. 骨架杨氏模量; d. 骨架体积模量



与横波速度随孔隙压力增加均减小(图4a-c),这主要是由于有效应力的减小改变了岩石弹性性质。假设地层上覆地层平均密度为 $2\,600\text{ kg/m}^3$,围压 65 MPa 条件下相当于模拟地层埋深 $2\,500\text{ m}$,孔隙压力由 25 MPa 增加到 55 MPa 的过程是地层由常压逐渐变为超压的过程,孔隙压力系数由 1.0 增加到 2.2 ;两个样品纵波速度分别减小了 526 m/s 和 391 m/s ,横波速度分别减小了 393 m/s 和 214 m/s 。部分饱和岩样实验结果也显示同样的超压响应特征,说明碳酸盐岩地层纵波与横波速度仍然包含了超压信息,但是由于碳酸盐岩地层具有很强的岩性和物性多重非均质性的特点,纵波与横波速度对碳酸盐岩地层超压的响应并不像碎屑岩地层超压响应的那样显著,所以难以直接建立经验性的相关参数关系用于超压预测。

由部分饱和岩样实验结果可知,在同一围压与孔隙压力条件下,含水饱和度小于 60% 时,随着含水饱和度的增加岩样纵波速度的变化不明显(图5a,b),其中M-3样品由于条带状白云石不均匀分布的影响使纵波速度出现小幅波动;当含水饱和度较高接近饱和时,纵波速度变化较显著。这种现象与孔隙流体在岩石中的空间分布特征有关^[10],岩石在低含水饱和度时,在较干燥岩石中水通过不断吸附孔隙空间表面形成了厚的水表面层,孔隙中心形成了相互连通的气体相,水在空间分布是均匀的,所有的孔隙是部分饱和状态,这种水和气体空间排列对岩石的非均匀性改变不明显,对岩石弹性性质、纵波速度的影响有限。当含水饱和度不断增加时,水继续沿着孔隙表面吸附,当达到一定临界饱和度时,水和气体空间分布将向着更加稳

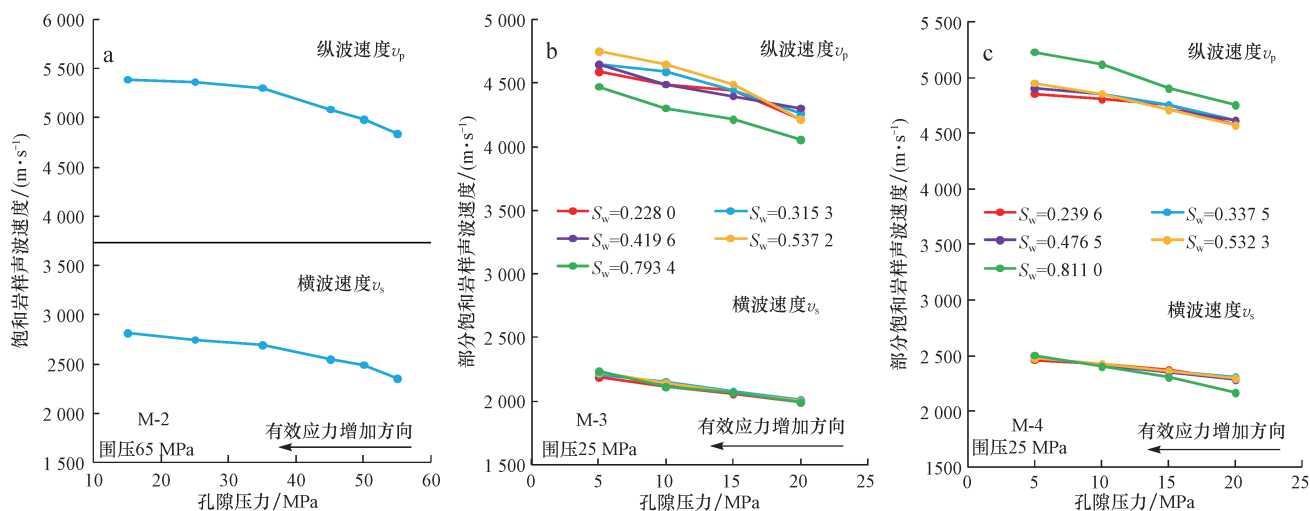
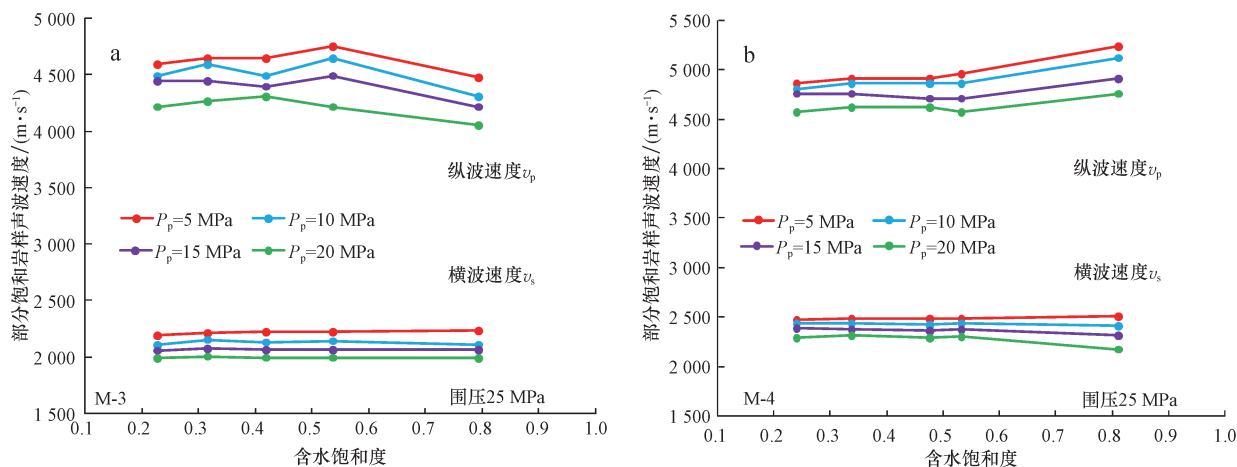


图4 碳酸盐岩饱和岩样、部分饱和岩样中纵、横波速度与孔隙压力的关系

Fig. 4 Correlations of pore pressure with P- and S-wave velocities in saturated or partially saturated carbonate rocks

a. 饱和岩样纵、横波速度;b,c. 部分饱和岩样纵、横波速度



定的热力学状态进行,部分孔隙完全充填,阻断了孔隙空间的气体相的连通性,形成了影响岩石非均匀性的斑块饱和状态^[11-12],因此对岩石弹性性质和纵波速度的影响较显著。而横波速度受含水饱和度的影响几乎没有变化,这主要是由于流体的剪切变形不会导致体积的改变。综上所述,含水饱和度是影响岩石体积弹性模量和纵波速度的关键要素,岩石剪切模量不受流体饱和的影响。

通过岩石物理模拟实验得到的碳酸盐岩纵波与横波速度超压响应特征是在岩石成分、常压初始孔隙度、含水饱和度固定不变的情况下得出的,这种响应难以应用于岩性、物性非均质性强的碳酸盐岩地层的超压预测。岩石成分、孔隙度和含水饱和度等岩石基础物性参数是构成岩石多孔性质的重要部件,对岩石弹性性质的影响不可忽略。因此,碳酸盐岩地层超压预测应综合考虑岩石物性参数对岩石性质的影响,从分析碳酸盐岩岩石应力-应变-孔隙压力本构关系着手,根据多孔介质弹性理论建立多孔岩石应力-弹性参数-弹性波速度耦合关系预测超压。

2 碳酸盐岩地层超压预测理论模型

岩石多孔介质弹性理论(Biot, 1941)中考虑了孔隙压力 p 对岩石的影响^[13]。结合广义胡克定律^[14]得到方程(1),它表示各向同性介质在外界平均有效应力和孔隙压力作用下的本构关系:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_m \delta_{ij}}{3K} - \frac{p \delta_{ij}}{3H} \quad \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \quad (1)$$

式中: σ_{ij} 和 τ_{ij} 分别为正应力张量和剪应力张量,Pa; p 表示孔隙压力,Pa; σ_m 为平均有效应力,Pa; ε_{ij} 和 γ_{ij} 分别为正应变张量和剪应变张量,无量纲; $1/H$ 表示在外界应力保持不变的情况下,单位孔隙压力增加所引起的岩石体积应变,Pa⁻¹; δ_{ij} 为克罗内克符号($i=j$ 时,值为1; $i \neq j$ 时,值为0); G 为岩石剪切模量; K 为岩石体积模量。

除了岩石的应变,同样要考虑作为独立参量的岩石中流体量的变化受岩石应变、剪切变形和孔隙压力的影响,由方程(2)表示:

$$\zeta = \frac{\sigma_m}{H_1} + \frac{p}{R} \quad (2)$$

式中: ζ 表示岩石中流体量的变化,无量纲; $1/H_1$ 表示保持孔隙流体压力不变情况下单位外界应力的增加所引起流体量的变化,Pa⁻¹; $1/R$ 则表示在外界应力保持不变的情况下,单位孔隙压力增加所引起的流体量的

变化,Pa⁻¹,其中 $H = -H_1$ 。

碳酸盐岩地层超压系统流体排出显著受阻,如果视为封闭系统,岩石中的流体量变化为0。这种状态下孔隙压力与外部应力关系表示为方程(3):

$$p = \frac{R}{H} \sigma_m = B \sigma_m \quad (3)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad (4)$$
</

性参数;岩石颗粒的成分组成、矿物组分弹性模量、岩石各部分混合在一起的几何细节。对于岩石来说,其矿物颗粒几何细节不可能获得。若只有前两项资料,可以在设定岩石颗粒排列特征的基础上计算获得其等效模量的上下限。岩石固体混合物等效模量的上下限相当接近,因此取其上下限的平均值是简便计算岩石基质体积模量 K_s 的方法。目前常用的方法有 Voigt-Reuss-Hill(1952) 和 Hashin-Shtrikman^[17] (1963) 方法。本次研究应用 Voigt-Reuss-Hill(1952) 方法,由 Voigt 等应变上限 M_V 和 Reuss 等应力下限 M_R 给出,这两种界限是在假设矿物颗粒平行板状排列,对于非颗粒堆积的岩性计算结果比较理想。1952 年 Hill 论证了 Voigt 和 Reuss 的平均值对精确估算岩石基质属性有一定的作用,取平均值表示为 Voigt-Reuss-Hill 平均模量^[18-20],方程(6):

$$M_{VRH} = \frac{M_V + M_R}{2} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i M_i + 1 / \sum_{i=1}^N f_i M_i}{2} \quad (6)$$

式中: M_i 为组成基质的各矿物组分弹性模量,Pa; M_{VRH} 为岩石基质等效模量,Pa; f_i 为组成岩石的 N 种矿物各部分体积百分数。

根据岩石矿物组分弹性模量实验室测试经验值(表3)和样品全岩 X-衍射(XRD)测试矿物成分数据(表4),利用 Voigt-Reuss-Hill 方法计算岩石基质体积模量、基质剪切模量(表4)。四个实验样品基质成分相近,岩石基质密度、基质弹性模量与主要组成矿物性质直接相关。

表3 岩石矿物组分和水的弹性参数经验值

Table 3 Empirical elastic parameters of rock mineral compositions and water

矿物	密度/ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	体积模量/ GPa	剪切模量/ GPa	数据来源 ^[21]
方解石	2.71	76.8	32.0	Simmons, 1965
白云石	2.87	76.4	49.7	Nur, 1969
石英	2.65	37.0	44.0	Carmichale, 1989
泥质	2.60	21.0	7.0	Tosaya, 1982
水	(温度)	2.18	—	Ba, 2013

表4 实验样品全岩 X-衍射矿物成分数据

Table 4 Mineral composition data of experimental samples from X-ray diffraction

样号	岩性	泥质/%	石英/%	方解石/%	白云石/%	基质体积模量 K_s /GPa	基质剪切模量 G_s /GPa
M-1	粉晶灰岩	0.50	0.80	91.00	7.70	75.65	32.86

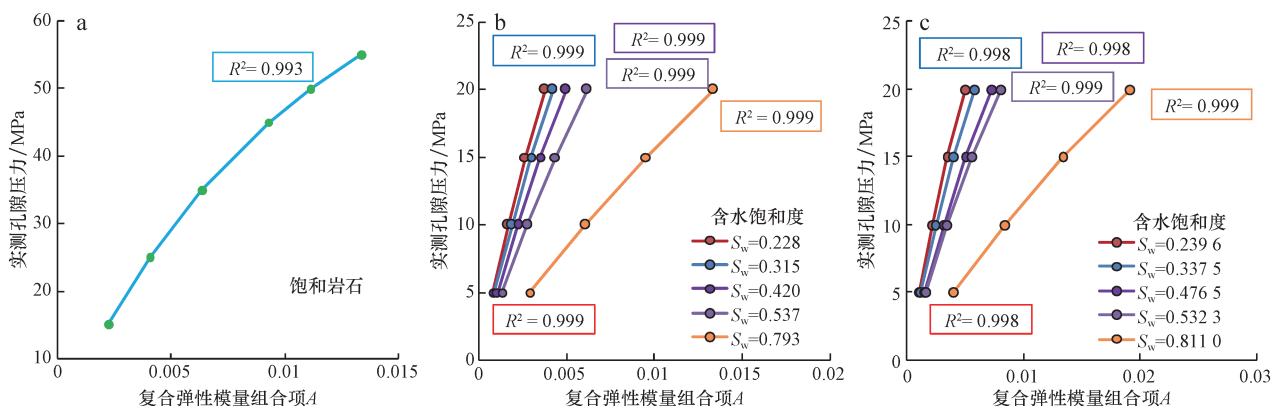


图6 围压固定下碳酸盐岩超压岩石物理模拟实验中孔隙压力与复合弹性模量组合项A的关系

Fig. 6 Relationship between pore pressure and composite elastic modulus combination A by the rock physics modeling experiment of overpressured carbonate rocks under constant confining pressure

a. M-2 样品, 围压 65 MPa; b. M-3 样品, 围压 25 MPa; c. M-4 样品, 围压 25 MPa

这反映了模型的一种固有缺陷。主要原因是上述模型和参数都是用来表征多孔介质的线弹性行为的, 实际岩石往往具有非线性弹性性质和能量耗散。而非弹性问题在实验和工程中测量和应用难度大^[23]。另外, 岩石各弹性参数计算过程需要用到各项物性实验数据, 实验误差也是引起这种非线性关系的重要因素; 因此, 本文在碳酸盐岩地层超压预测理论模型的基础上, 通过引入系数 β 可简化处理由能量耗散和实验测试引起的模型预测结果的偏差问题, 得到适用性更好的碳酸盐岩超压预测量化方程(8)。系数 β 为基于实测数据的模型校正系数, 该系数可利用岩石物理模拟实验数据、地层测试数据、碳酸盐岩地层岩性和物性等资料计算获取。

$$p = \frac{\bar{\sigma}}{\left(\alpha + \frac{1}{B}\right)^{\beta}} = A^{\beta} \bar{\sigma} \quad (8)$$

$$= \frac{\bar{\sigma}}{\left[2 - \frac{K_d}{K_s} + \frac{\phi K_d (K_s - K_f)}{K_f (K_s - K_d)}\right]^{\beta}}$$

这种基于岩石多孔介质弹性理论的超压预测模型理论性强, 参数获取手段和模型选择尤为重要, 在实际测井、地震应用时, 需要细致地进行基础物性资料解释; 在此基础上, 利用一些等效介质模型得到岩石基质和孔隙流体弹性参数, 利用流-固双相介质模型(Biot-Gassmann模型、Squirt模型、BISQ模型、White模型等)计算岩石骨架弹性模量, 进而实现碳酸盐岩地层超压预测。

5 结论

1) 碳酸盐岩样品超压岩石物理模拟实验结果表

明, 干燥岩样纵、横波速度均随着围压(有效应力)的增加而增大, 低围压下纵波与横波速度变化幅度大, 主要受低围压下微裂缝、软孔隙闭合的影响。干燥岩样弹性

- [C] // Development in Petroleum Science [M]. Amsterdam, Oxford New York; Elsevier Scientific Publishing Company. 1978.
- [2] Eaton B A. Graphical method predicts geopressure worldwide [J]. Word Oil, 1972, 51: 51–56.
- [3] 杨皎, 何生, 王冰洁. 东营凹陷牛庄洼陷超压特征及预测模型 [J]. 地质科技情报, 2009, 28(4): 34–40.
Yang Jiao, He Sheng, Wang Bingjie. Characteristics and prediction model of the overpressures in the Niuzhuang sag of Dongying depression [J]. Geological Science and Technology Information, 2009, 28(4): 34–40.
- [4] Fillippone W R. On the prediction of abnormally pressured sedimentary rocks from seismic data [C] // Offshore Technology Conference, Houston, Texas. 1979: 2667–2676.
- [5] 何生, 宋国奇, 王永诗, 等. 东营凹陷现今大规模超压系统整体分布特征及主控因素 [J]. 地球科学—中国地质大学学报, 2012, 37(5): 1029–1042.
He Sheng, Song Guoqi, Wang Yongshi, et al. Distribution and major control factors of the present-day large-scale overpressured system in Dongying depression [J]. Earth Science (Journal of China University of Geosciences), 2012, 37(5): 1029–1042.
- [6] Eberhart-Phillips D M. Investigations of crustal structures and active tectonic processes in the Coast Ranges, Central California [D]. Stanford University, 1989.
- [7] Bowers G L. Pore pressure estimation from velocity data; account for overpressure mechanisms besides undercompaction [J]. SPE Drilling and Completion, 1995, 10(2): 89–95.
- [8] 路凤香, 桑隆康. 岩石学 [M]. 北京: 地质出版社, 2002.
Lu Fengxiang, Sang Longkang. Petrology [M]. Beijing: Geological Publishing House, 2002.
- [9] 邓继新, 王尚旭, 俞军. 不同压力条件下部分饱和砂岩速度实验结果及理论解释 [J]. 石油地球物理勘探, 2005, 40(5): 530–534.
Deng Jixin, Wang Shangxu, Yu Jun. Experimental results in partially saturated sand-stone under condition of different pressure and their theoretical interpretation [J]. Oil Geophysical Prospecting, 2005, 40(5): 530–534.
- [10] 未呢, 王尚旭, 赵建国, 等. 致密砂岩纵、横波速度影响因素的实验研究 [J]. 石油物探, 2015, 54(1): 9–16.
Wei Xian, Wang Shangxu, Zhao Jianguo, et al. Laboratory investigation of influence factors on vp and vs in tight sandstone [J]. Geophysical Prospecting for Petroleum, 2015, 54(1): 9–16.
- [11] Endres A L, Knight R. The effects of pore-scale fluid distribution on the physical properties of partially saturated tight sandstones [J]. Journal of Applied Physics, 1991, 69(2): 1091–1098.
- [12] Knight R, Nolen-Hoeksema R. A laboratory study of the dependence of elastic wave velocities on pore scale fluid distribution [J]. Geophysical Research Letters, 1990, 17(10): 1529–1532.
- [13] Biot M A, General theory of three-dimensional consolidation [J]. Journal of Applied Physics, 1941, 12(2): 155–164.
- [14] 刘鸿文. 材料力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
Liu Hongwen. Mechanics of materials [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.
- [15] Skempton A. W. The pore-pressure coefficients A and B [J]. Géotechnique, 1954, 4(4): 143–147.
- [16] Biot M A, Willis D G. The elastic coefficients of the theory of consolidation [J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, 15(2): 594–601.
- [17] Hashin Z, Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials [J]. Journal of the Mechanics & Physics of Solids, 1963, 11(2): 127–140.
- [18] Reuss A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1929(1): 49–58.
- [19] Voigt W. Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. [J]. Annalen der Physik,